

## 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФАЗОЧАСТОТНИХ ВИМІРЮВАНЬ ТА ПЕРЕТВОРЕНЬ РАДІОСИГНАЛІВ

### 2.1. Проблеми вимірювання фазочастотних параметрів радіосигналів та шляхи їх розв'язання

В техніці радіовимірювань вже досить давно склалися два напрямки вимірювань, які є визначальними для радіотехніки - це вимірювання частоти  $f$ , та вимірювання кута фазового зсуву (КФЗ) - фази  $\varphi$ .

Методи та засоби вимірювання  $f(t)$  і  $\varphi(t)$  настільки різноманітні та відпрацьовані, що їх монополія є беззаперечною [4, 13, 14]. І насправді, сучасні прилади групи Ч і Ф, як правило, цифрові і перекривають діапазон від часток Гц до сотень ГГц [69, 71, 103]. Але все це стосується лише того випадку, коли мова йде про ідеальні сигнали, яким відповідають математичні моделі сигналу для групи Ч:

$$S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

де  $f_0$  - частота сигналу;  $\varphi_0$  - початкова фаза.

Для групи Ф математичні моделі мають наступний вигляд:

$$S_1(t) = A_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1); S_2(t) = A_2 \cos(2\pi f t + \varphi_2); \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Коли мова йде про реальні сигнали (модульовані, обмежені у часі), які ми називаємо також радіосигналами, і які переносять інформацію, на відміну від ідеальних (необмежених у часі) наведені вище моделі вже не працюють. В той же час сила звички та простота роботи із гармонічними сигналами викликали появу квазігармонічних моделей, які досить добре апроксимують реальні процеси і дають гарну подібність результатів вимірювань [110-112, 114, 115, 125-127].

До того часу поки вихідні пристрої для реєстрації і відображення інформації мали малий динамічний діапазон  $A < 40$  дБ, тобто (100 поділок на шкалу), інструментальна похибка та розрізняюча спроможність приладів маскували методичні похибки викликані використанням квазігармонічних моделей.

Із появою високоточних приладів і діапазоном значень шкали

$A > 60$  дБ, почали проявлятися деякі парадокси, коли збільшення розрізняючої спроможності приладу не завжди веде до збільшення точності вимірювання.

Яскравим прикладом таких проявів неадекватності моделей є вимірювання частоти частотно-модульованих сигналів (ЧМС) високоточним частотоміром. Адже відомо, що частота ЧМС міняється на досить значну величину  $f_D = 10^{-9} \div 10^{-4} f_0$ , а розрізняюча здатність частотоміра на декілька порядків більша, і в той же час, він показує нам значення близьке до  $f_0$ , за час вимірювання, а не  $f_0$ ,  $f_0 + f_D$ , як то є в реальному сигналі.

Іншим прикладом, який відноситься до групи Ф, є вимірювання фазових зсувів більших  $2\pi$  (кумулятивної, мультиплікативної, повної фази і т.д.), коли всі знають, що так є, але в той же час класична фазометрія визначає  $\varphi \in (0^\circ - 360^\circ, \pm \pi)$ , в якій відсутні значення  $> 360^\circ$  ( $380^\circ$ ,  $500^\circ$  і т.п.).

В той же час, для багатьох практичних вимірювань в інтерферометричних, радіолокаційних системах, механічних та інших, проблема вимірювання фази більше  $2\pi$  є реальним завданням і вона має досить різних варіантів реалізації вимірювань.

Ще більше непорозумінь виникає і виникне при вимірюванні фазочастотних параметрів радіосигналів, модульованих, як вузькосмугових так і широкосмугових, де, незважаючи на високі технічні характеристики приладів, не завжди вдається досягти тих самих похибок, що і на сигналах із аналогічними параметрами, але без модуляції і т.п.

Для класичного частотоміра із  $T_{вим} = 1$  с не існує поняття розрізняючої спроможності  $\Delta f \leq 1 \text{ Гц} (1 / T_{вим})$ , в той же час сучасні радіотехнічні системи працюють із швидкоплинними сигналами, де вказане обмеження дає розрізняючу здатність на рівні  $10^{-3} - 10^{-4} \text{ Гц}$ . Тоді ж, коли є нагальна потреба знати вказані параметри частоти на 1-2 порядки точніше, як це зробити класична частотометрія відповіді не дає, тому що вказані параметри точності вимірювання виходять за межі можливостей використаних нею моделей і методів вимірювання  $f$ , що на них базуються [80, 114, 115, 124, 140, 145].

Автором був проаналізований стан проблеми і встановлений наслідковий зв'язок тих непорозумінь і штучних обмежень, які

зустрічаються під час вимірювання фазочастотних параметрів радіосигналів [9-11, 128]. Він проявляється у тому, що взявши із радіотехніки моделі квазігармонічних сигналів і перенісши їх на терени радіовимірювань, досить часто (майже завжди), забувають про ті обмеження, які накладені на квазігармонічні моделі в теорії радіосигналів та спектрального аналізу [47, 52, 245, 258].

Це стосується в основному моделей модульованих сигналів:

$$S(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)),$$

де останній вираз є записом у квазігармонічній формі [12, 23, 30].

Або ж у більш загальному вигляді для АМ:

$$S(t) = A(1 - M \cos \Omega t) \cos 2\pi f_0 t,$$

або для ЧМ:

$$S(t) = A_0 \cos(2\pi(f_0 + f_D \cos \Omega)t),$$

і так далі.

Формально і практично все зроблено вірно, але при цьому допущені і грубі помилки, які можуть призвести до повної неприцездатності моделей. В чому ж суть? Найбільш наглядно на це відповідають теорія спектрального аналізу і перетворення Фур'є.

Відомо, що лінійчастий спектр існує лише для сигналів, які:

- 1- мають періодичність;
- 2- необмежені на осі часу.

Що стосується першого пункту, то реальні сигнали у першому наближенні є періодичними, що ж до другого пункту, то він відноситься лише до моделі ідеальних сигналів (нескінченних на часовій вісі  $t \in (-\infty \div +\infty)$ ). Всі реальні (навіть досить періодичні) сигнали обмежені

$t \in (t_{\text{ввгл}} \div t_{\text{вим}})$ , тому що не існує джерела з  $P_{\text{ген}} \rightarrow \infty$ .

Але на практиці час квазістаціонарності параметрів радіосигналів, як правило, значно більший часового проміжку періодичності, тому модель вважають вірною і про другий пункт забувають, тим більше, вважаючи на те, що на практиці вимірювань параметрів реальних сигналів результати дають гарну сходиність. Помилки тут немає, але є змішування поняття "частота", яке для радіотехніки має дві реалії:

-миттєва частота радіосигналу:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

для монотонного гармонічного сигналу, і частота його спектральної складової  $\omega_k$ :

$$S(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(k \omega_k + \varphi_k),$$

які лише у випадку ідеальних сигналів рівні і еквівалентні  $\omega_0 = \omega_k$ , в інших випадках вони не співпадають, в тому числі для великого класу радіосигналів, до яких входять вузькосмугові.

Таким чином, для фазочастотних вимірювань недопустиме механічне перенесення моделей та методів класичної фазометрії і частотометрії, тому потрібно шукати інші моделі та напрямки при вимірюванні параметрів радіосигналів, чому і присвячені подальші глави книги.

## **2.2. Поняття та моделі теорії фазочастотних вимірювань і перетворень радіосигналів**

Для виявлення особливостей понять фази та частоти для радіосигналів із теренів радіовимірювальної техніки та розроблення адекватних моделей, повернемося до класичної радіотехніки та вимірювальної техніки [125, 126, 131].

Спочатку розглянемо визначення поняття фази та її моделі, які характерні для класичної фазометрії.

Врахуємо, що ми вирішуємо завдання вимірювання фази, для яких розроблені оптимальні структури систем обробки сигналів [131, 146, 147, 150].

Сформулюємо критерій оптимальності для випадку вимірювання фази сигналу. Фаза при вимірюванні може оцінюватися або по разовому відліку, або по деякій вибірці суміші сигналу та завади. Істинне значення фази у загальному випадку завжди буде відрізнятися від його оцінки

фази  $\varphi^{\times}$ . Як відомо [131], відхилення істинного значення  $\varphi$  від її оцінки

$\varphi^{\times}$  буде характеризуватися функцією втрат  $I(\varphi, \varphi^{\times})$ . Найбільш часто

вживають квадратичну залежність  $I(\varphi, \varphi) = (\varphi - \varphi)^2$ , що є більш прийнятним для статистичної теорії вимірювань [80, 84, 131, 146].

Середнє значення функції втрат, взяте за множиною реалізацій і зважене у відповідності із сумісною густиною ймовірності розподілу  $\varphi, \varphi$  називається середнім ризиком [80, 84, 110, 131, 146, 156]:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int I\left(\varphi, \varphi\right) p(\varphi, \varphi) d\varphi d\varphi,$$

і тоді оптимальний вимірювач фази буде забезпечувати мінімум значення середнього ризику  $R$ , а відповідна йому процедура є оптимальним методом вимірювання  $\varphi$ , при цьому оцінка  $\varphi$  береться згідно максимуму функції правдоподібності. Як функцію правдоподібності можна розглядати багатомірну функцію розподілу суміші завади  $x(t)$  та сигналу  $S(t, \varphi)$ , в якому міститься корисна інформація в фазі  $\varphi$ , та аддитивної завади із спектральною густиною  $N_0$  і дисперсією  $S_s^2$  (типу білий шум). Тоді вхідний сигнал буде мати вигляд функції:

$$S(t, \varphi_3) = A(t) \cos[\omega_n t + \psi(t) + \varphi_3],$$

де  $A(t)$  - модулююча функція амплітуди;

$\Psi(t)$  - модулююча функція фази;

$\omega_n$  - частота несучого коливання.

Невідома початкова фаза  $\varphi_3$ , яку необхідно виміряти, оцінюється із вхідної реалізації  $x(t)$  тривалістю  $\Delta t$  і має вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , де  $m$ -кількість незалежних відліків за час  $\Delta t$ .

Для загального випадку функція розподілу суміші сигналу та завади може бути представлена у вигляді [131, 146]:

$$p(x_1, x_2 \dots x_m / \varphi_3) = \frac{1}{(2\pi\sigma_3^2)^{m/2}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^{\Delta t} [x(t) - s(t, \varphi_3)]^2 dt \right]$$

Розглядаючи її як функцію правдоподібності та шукаючи її максимум, можливо встановити, що оцінка фази  $\varphi$  повинна проводитися за відомою формулою [131, 146]:

$$\varphi^\times = \theta = \arctg \frac{\int_0^{\Delta t} x(t) A(t) \sin[\omega_n t + \psi(t)] dt}{\int_0^{\Delta t} x(t) A(t) \cos[\omega_n t + \psi(t)] dt},$$

а оптимальний вимірювач має такий вигляд рис. 2.1.

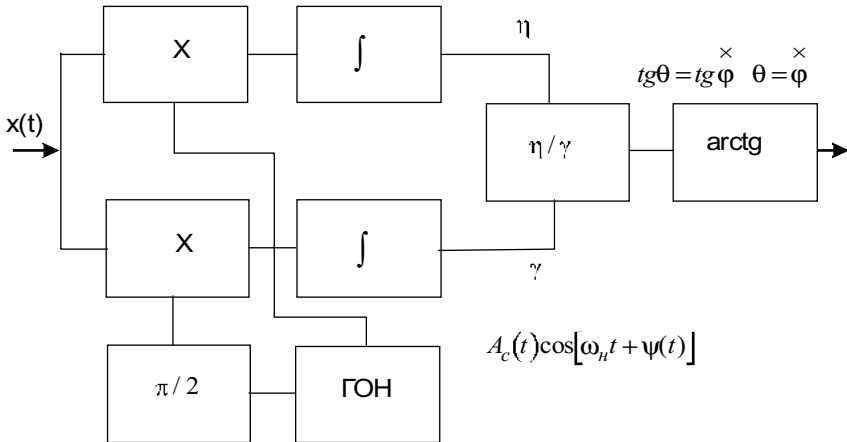


Рис. 2.1. Оптимальний вимірювач фази

У випадку простих сигналів (монохроматичний сигнал)  $S(t, \varphi_3) = A \cos(\omega_n t + \varphi_3)$ , оцінка фази буде:

$$\varphi^\times = \theta = \arctg \frac{\int_0^{\Delta t} x(t) \sin \omega_n t dt}{\int_0^{\Delta t} x(t) \cos \omega_n t dt}.$$

Але в обох випадках зона аргументів була штучно обмежена  $\varphi \in (-\pi \div +\pi)$ , завдяки чому маємо класичну фазометрію [13, 40, 41, 155, 157].

Для класичної фазометрії моделі сигналів при вимірюванні кута фазового зсуву (метрологічний термін)  $\varphi \in (0^\circ \div +360^\circ)$  вводяться при умові, що частоти сигналів  $U_1$  і  $U_2$  між якими вимірюється  $\varphi$  однакові, тоді різниця кутів фазового зсуву двох гармонічних коливань:

$$U_1(t) = U_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ і } U_2(t) = U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

буде називатися різниця аргументів косинусів:

$$\psi_1(t) \text{ і } \psi_2(t) \rightarrow \varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) = (\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2,$$

але враховуючи:

$$\omega_1 \equiv \omega_2, \text{ тоді } \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

На практиці  $\varphi(t)$ ,  $\Delta\varphi$  знаходять через момент часу  $t_1$  і  $t_2$  коли обидва сигнали  $U_1(t)$  і  $U_2(t)$  знаходяться в фазі (як правило в точках нуль-переходів).

Тоді:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega(t_1 - t_2) = 2\pi \leq (t_1 - t_2) / T.$$

Для отримання відліку в градусах:

$$\Delta\varphi^\circ = 360^\circ \Delta t / T,$$

де  $\Delta t$  - інтервал часу між синфазними точками;

$T=1/f$  - період коливань, але діапазон значень  $\varphi \leq 360^\circ$ .

В роботах Суп'яна В.Я.[61, 62], та Похилюка О.П. [141] проводились дослідження з вимірювання фазового зсуву між імпульсно-модульованими сигналами, де вводились поняття фазового зсуву між двома радіосигналами, що полягало в наступному.

Як відомо, сигнали із AIM відносяться до класу вузькосмугових, і можуть бути представлені у вигляді:

$$S_1(t) = A_1(t) \cos \Psi_1(t), \quad S_2(t) = A_2(t) \cos \Psi_2(t),$$

де  $A(t)$  і  $\Psi(t)$  - відповідно огибаюча та повна фаза. Але у зв'язку із неоднозначністю їх визначення використовують перетворення Гільберта для знаходження  $A(t)$  і  $\Psi(t)$ , тоді:

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + a_1^2(t)}; \quad \Psi(t) = \arctg a_1(t) / a(t),$$

де  $a_1(t)$  - нова функція, пов'язана із вихідною перетворенням Гільберта:

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad a(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_1(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Звідки за аналогією вводиться поняття фази  $\Psi(t)$  і частоти -  $\omega(t) = d\Psi(t)/dt$  і наклавши обмеження на рівність частот заповнення (носійних) радіоімпульсів та постійність періоду повторення КФЗ між двома радіоімпульсами, які перекриваються, отримуємо:

$$\varphi(t) = \Psi_1(t) - \Psi_2(t) = \varphi_1 - \varphi_2 - [\Phi_1(t) - \Phi_2(t)],$$

де  $\varphi_1, \varphi_2$  - стаціонарна різниця початкових фаз несучого коливання;

$-\left[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)\right]$  - динамічний (нестационарний) фазовий зсув.

І в той же час, вимірювання  $\varphi$  між радіоімпульсами трактується як  $t = \varphi / \omega$  (час затримки між огибаючими радіоімпульсів в межах періоду носійного коливання, тобто  $\varphi \in (0 \div 2\pi)$ ), як і в класичній



фазометрії [40-42].

Вимірювання фазових зсувів більше  $2\pi$  досить широко відоме у радіолокації, інтерферометрії, інших галузях [6-8, 23, 65, 66], але воно базувалося на технічних реалізаціях конкретних методів вимірювання, і відповідно, звідси і назви величин які вимірюються (кумулятивна фаза, мультиплікативна фаза, фазові цикли, повна фаза та інші). При вказаних вимірюваннях діапазон фазових зсувів вже не обмежений  $0 \div 2\pi$ , але відсутність їх теоретичного підґрунтя та невизначеність по відношенню до  $\omega(t)$  породжує нові непорозуміння, тому розглянемо деякі моделі сучасних методів і поняття вимірювання частоти.

В [47, 245] відзначаються особливості застосування терміну “частота”, який одночасно застосовується до двох параметрів: миттєвої частоти та частоти спектральної складової, властивості яких істотно різняться, при однаковій їх розмірності, що при змішуванні вказаних визначень призводило до похибок та непорозумінь [245].

Якщо сигнал записаний у тригонометричній формі:

$$S(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

тоді “повна” фаза сигналу визначається:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t),$$

де  $\omega_0$  - середня, або початкова частота, а миттєва частота:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt},$$

і є функцією часу, яка відповідає частоті сигналу в даний момент. Таким чином складний сигнал характеризується миттєвою початковою амплітудою  $A(t)$  (огинаючою), миттєвою частотою та миттєвою початковою фазою  $\varphi(t)$ .

Той же сигнал  $S(t)$  може бути також представлений у вигляді суми спектральних складових, що утворюють спектр сигналу

тривалістю  $T$ , який передував даному моменту часу:

$$S_T(\omega, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t S(t) e^{-j\omega t} dt,$$

де  $S_T(\omega, t)$  - набір спектральних складових, які відносяться до визначеного моменту  $t$ , і відрізняються фіксованими частотами  $\omega_\kappa$  та рівними  $\varphi$ .

Інколи, для дослідження швидкісних процесів зміни  $\omega(t)$  використовують можливість приладів вимірювати одиночні періоди сигналу, але "точкові" визначення частоти не відповідають суровому визначенню - "миттєвої частоти".

У найпростішому випадку ідеального гармонічного сигналу  $A \cos(\omega t + \varphi)$  для  $-\infty < t < +\infty$  миттєва частота є постійною і співпадає з єдиною частотою спектра  $\omega_0 \equiv \omega_\kappa$ . Вірогідність представлення сигналу його миттєвою частотою і спектром залежить від об'єкта дослідження. При проходженні сигналу через нелінійні кола потрібно користуватись миттєвою частотою, а при вивченні лінійних кіл - спектром [146, 245].

Між іншим, цифрові вимірювачі частотно-часових величин визначають середнє значення кількості синфазних переходів через нуль визначеним чином сформованих сигналів, таким чином, і в такому розумінні, користуються терміном "частота" відносно приладів групи Ч.

Питання ж, є це середнім значенням миттєвої частоти, або ж частотної спектральної складової, вирішує оператор згідно характеру досліджуваного сигналу.

Звичайно на практиці під частотою гармонічного коливання розуміють число періодів сигналу  $N$  за інтервал часу, який береться за зразковий  $T_{zp}$ , тоді діє модель:

$$f_x = \frac{N}{T_{zp}} = N f_{zp} = \frac{1}{T_x}; \quad T_{zp} \gg T_x.$$

На низьких частотах, коли  $T_{zp} \ll T_x$  діє інша модель:

$$f_x = N T_{zp} = \frac{N}{f_{zp}} = \frac{1}{T_x}.$$

Коли  $T_{zp} = 1\text{с}$ , тоді  $f$  [Гц], для першого випадку,  $T_{zp} = 1\text{мкс}$ , тоді  $f_x$  [МГц] - для другого.

При вимірюванні відношення частот двох сигналів береться  $T_{zp} = T_{x1}$ , тоді  $N = f_{x1} / f_x = T_x / T_{x1}$ , де N- показує співвідношення частот (періодів).

Наряду із вказаними вище моделями, для високостабільних генераторів та їх характеристик існують і інші поняття:

$$\text{-миттєва частота } -\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 + \alpha\omega_0 + \Delta\omega(t),$$

де  $-\alpha\omega_0 t$  - систематична зміна частоти  $\omega_0$ ;

-  $\Delta\omega(t)$  - випадкова складова.

Зміну частоти генераторів у вимірювальній техніці прийнято характеризувати короткочасною та довготривалою нестабільностями [70]. Перша залежить від функції частоти, друга - від її систематичних змін.

Для вимірювання частоти за час  $t$  використовують наступну модель:

$$\omega_c(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \omega(t) dt = \frac{1}{\tau} [\Psi(t - \tau/2) - \Psi(t - \tau/2)].$$

На основі чого можливо знайти довготривалу нестабільність частоти середніх значень частоти  $\omega_c(t)$  на початку та кінці інтервалу  $T \gg t$ :

$$\Delta\omega_{dm}(t) = \omega_c(t + T/2) - \omega_c(t - T/2),$$

де значення  $T$  і  $t$  рекомендовано вибирати із таблиці 1[70].

Таблиця 1

T	1 рік	1 місяць	1 доба	1 год	100с	100с	100с	100с
t	1 доба	1 доба	1 год	100с	1с	0,1с	0,01с	0,001с

Оскільки  $\Delta \omega_{dT}(t)$  залежить від часу, то для її оцінки на практиці беруть середнє арифметичне із N значень, які отримують на інтервалі NT, тобто:

$$\overline{\Delta \omega_{dm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\omega_c(t_i + T/2) - \omega_c(t_i - T/2)].$$

При вимірюванні короткочасної нестабільності частоти береться такий інтервал T, на якому систематичні зміни частоти незначні. Поточне значення короткочасної нестабільності знаходиться за моделлю:

$$\omega_{кор} = \omega_c = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \omega(t) dt,$$

і характеризується середнім квадратичним значенням  $S_{кор}$  на інтервалі T:

$$\sigma_{кор} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[ \omega_c(t_i) - \frac{1}{k} \right].$$

Як видно із розглянутих моделей вимірювань для приладів групи Ф і Ч, всі вони добре працюють лише при чистих гармонічних сигналах (ідеальних), коли ж мова йде про радіосигнали, то впевненості у достовірності квазігармонічних моделей немає, і при багатьох видах вимірювань вони дають значні методичні похибки, які можуть значно перевищувати інструментальні, сучасних вимірювальних приладів.

Тому повернувшись до теорії радіосигналів, де їх моделі є адекватними, пропонується більш жорстко підійти до розробки моделі, придатної для вимірювання фазочастотних параметрів радіосигналів. Насамперед це стосується визначення зони значень оцінки вимірювання фазового зсуву. Адже із математики відомо, що обернені

тригонометричні функції  $\arcsin$ ,  $\arccos(\arctg, \operatorname{arccotg})$  мають дійсні значення лише при аргументах  $-\pi \div +\pi (0 \div \pi)$ . В той же час обернені функції  $\operatorname{Arcsin}$ ,  $\operatorname{Arccos}$  мають нескінченне число значень аргументів і визначаються через головне значення:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} Z &= (-1)^n \arcsin Z + 2n\pi, & n &= 1, 2, \dots k. \\ \operatorname{Arccos} Z &= + \arccos Z + 2n\pi, & n &= 0, +1, +2 \dots k. \end{aligned}$$

Звідси, за аналогією знаходження фазового зсуву (мається на увазі і більше  $2\pi$ ) введемо поняття  $\Psi$  - повного фазового зсуву, який складається із двох частин:

$\varphi$  - кута фазового зсуву (КФЗ);

$N$  - кількості фазових циклів (фц), тобто адекватною є модель:

$$\Psi(t) = N_{\phi y}(t) + \varphi(t),$$

що і є фундаментальним поняттям фазочастотних вимірювань. Тоді, враховуючи, що первинним є  $\Psi(t)$ , параметри:

- миттєва частота  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \cong \frac{\Delta\Psi}{\Delta t},$$

і її параметри зміни:

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\Psi(t)}{dt^2}.$$

Таким чином, знаючи єдиний параметр  $\Psi(t)$ , можливо простим диференціюванням визначити будь-які частотні параметри ( $\omega(t)$ ,  $\omega_c(t)$ ,  $\omega_{ДТ}$ ,  $\omega_{кор}$ , і т.п.), використовуючи єдиний вимірювальний алгоритм знаходження  $\Psi(t)$ .

Введення визначення ПФЗ не протирічить ні фазовим (група Ф)

ні частотним (група Ч) вимірюванням, а також теорії кепстрального аналізу, і є узагальненням обох напрямків та створює теоретичне обґрунтування теорії фазочастотних вимірювань, яка дозволяє, не порушуючи усталених методів вимірювання  $f$  і  $\varphi$ , відкрити нові унікальні можливості не тільки вимірювання, а також і формування фазочастотних параметрів радіосигналів. Таким чином, накладені класичними методами обмеження зняті і запропонована модель адекватна фазочастотним параметрам реального радіосигналу.

Досить наглядним є поняття ПФЗ, коли розглядати покази приладів групи Ч, як цілу частину, а групи Ф - як дробову, на єдиній числовій шкалі вимірюваних значень. Тому пропонується розглядати всю площину результатів вимірів фазочастотного параметру ПФЗ як:

$$\begin{array}{ccccc} \psi(t) = |\Psi(t)| + \{\Psi(t)\}; & & & & \\ \text{частота, кут фазового зсуву} = \text{ПФЗ} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(t) & & \varphi(t) & & \Psi(t) \end{array}$$

Результат може бути представлений числом в системі числення із основою  $q$ , як:

$$Y_q = \sum_{k=0}^{N-1} a_k q^k, a = 0, 1, \dots, q^{-k},$$

коли  $q = 10$  десяткова система числення,  $q = 2$ - двійкова, тоді відповідно результати будуть мати вигляд:

$$Y_{10} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k 10^k, \text{ для } q=10, \quad Y_2 = \sum_{k=0}^{N-1} a_k 2^k,$$

для  $q=2$ .

Дробова частина буде представлена від'ємними степенями  $k$ :

$$\{Y_q\} = \sum_{k=-k}^{N-1} a_k 10^{-k}, (q=10),$$

або

$$\{Y_2\} = \sum_{k=-k}^{N-1} a_k 2^{-k}, (q=2).$$

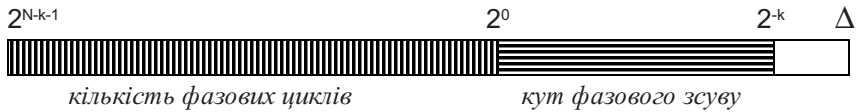
Для представлення  $\Psi(t)$  потрібно об'єднати обидві величини:

$$\Psi_2 = \sum_{k=0}^{N-k-1} a_k 2^{-k}, (q=2), \quad \Psi_{10} = \sum_{k=0}^{N-k-1} a_k 10^{-k}, (q=10),$$

де  $k$ - кількість розрядів дробової частини;

$N$ - загальне число розрядів вимірювача ПФЗ.

Така система представлення результатів добре узгоджується із цифровими методами обробки інформації. Графічно її можна зобразити на числовій вісі:



Для теорії вимірювань важливі: чутливість(початок шкали):

$$-\Delta\phi_{\min} = \Delta\phi = 2^{-k},$$

тоді кінець шкали (максимальне значення):

$$\Delta\phi_{\max} = 2^{N-k-1},$$

а також їх відношення (динамічний діапазон):

$$A = \frac{\Delta\phi_{\max}}{\Delta\phi_{\min}} = 2^{N-1},$$

що значно більше ніж у окремо взятих приладів групи Ч, або Ф.

Для аналогів із механічною моделлю вимірювання шкала або доповнюється ноніусом ( $\mathcal{U} \rightarrow \Phi$ ), або ноніусна шкала доповнюється інтерполятором цілих частин ( $\Phi \rightarrow \mathcal{U}$ ), зберігаючи переваги кожної із них.

### 2.3. Основні напрямки і методи теорії фазочастотних вимірювань та перетворень параметрів радіосигналів

Оскільки всі реально існуючі сигнали, які переносять інформацію, мають як мінімум кінцеву енергію, не говорячи вже про зміну основних характеристик та параметрів сигналу, їх можна розглянути як радіосигнал загального виду:

$$S(t) = A_m(t) \cos \Psi(t),$$

де  $A_m(t)$  - змінна в часі амплітуда сигналу  $A_m$ ;

$\Psi(t)$  - повна фаза.

Для дослідження властивостей будь-якого процесу, речовини, сигналу тощо, характерними є два різних підходи, які направлені відповідно на з'ясування природи явища (сигналу) - аналіз (вимірювання), і на можливі напрямки утворення або ж використання даних особливих властивостей (синтез, перетворення).

Тому розглянувши основні напрямки в розрізі підходу з'єдиних позицій теорії фазочастотних вимірювань та перетворень радіосигналів (теорії ФЧВ і ПР) необхідно відзначити два основних напрямки, на яких і базуються всі подальші аспекти вимірювання параметрів радіосигналів та їх перетворень - тобто синтезу радіосигналів із потрібними властивостями.

Принциповими для першого напрямку є первинність при вимірюванні аргумента  $\Psi(t)$  і знаходження досить популярної при широкому класі вимірювальних задач частоти:

$$f(t) = \frac{d\Psi(t)}{2\pi dt},$$

тобто згідно класичного визначення  $f(t)$ .

Таким чином, очевидним є, що основне завдання напрямку аналізу (вимірювання) полягає у знаходженні (вимірюванні) ПФЗ  $\Psi(t)$  із максимально можливою точністю за мінімально короткий час, що може бути досягнуто лише шляхом збільшенням потужності інформаційного потоку з апіорі невідомої величини.

Оскільки  $f(t)$  знаходять як похідну, то вказана операція розуміється як істотне підвищення точності вимірювань, що відповідає усталеному напрямку в метрології - частотні вимірювання є найбільш точними [70] і



еталонуються з похибками порядку  $10^{-11}$ - $10^{-13}$  і є практично недосяжною межею для інших методів вимірювань [22, 68, 70, 105, 145].

Таким чином, теорія ФЧВ і ПР в цілому не протирічить доведеним на практиці істинам і лише вказує шлях її знаходження із адекватної реальному сигналу математичної моделі.

Другий напрямок полягає відповідно у формуванні або перетворенні сигналів у часі (формування розгортки  $\Psi(t)$ ), що є синтезом фазочастотних параметрів сигналів, або створення їх інформаційної наповненості - в даному випадку є характерним для радіосигналів (класичних)- модуляції.

Оскільки радіосигнал може бути представлений у декількох формах (аналогова, імпульсна, цифрова), які складають відповідні класи сигналів:

- аналогові (неперервні в часі та за рівнем);
- дискретні (перервні в часі і неперервні за рівнем);
- цифрові (квантовані за рівнем і дискретні в часі) [84].

Таким чином, в обох напрямках, відповідно із класами існуючих сигналів, можна виділити будь-який із видів сигналів, які в принципі не змінюють загального значення інформаційного параметра, а лише можуть створити додаткові похибки (дискретизації, шуми квантування. і т.п.). Тому раціонально виділити загальні класифікаційні ознаки властивостей параметрів  $\Psi(t)$ , що вимірюються.

Можливі три основні види вимірювання  $\Psi(t)$ :

1 - вимірювання миттєвих значень  $\Psi(t)$  і є завданням більш теоретичним ніж практичним, так як при  $t \rightarrow 0$  проблематичним є проведення операції вимірювання взагалі із за зменшення інформаційного потоку, який можливо зняти до нульового рівня та переведення вимірювальної задачі в площину визначення лише наявності сигналу. Тому розумітимемо що  $\Psi(t)$  - це є те значення  $\Psi(t)_{\text{вим}}$ , яке можна виміряти за  $t_{\text{вим}} = t_{\text{вим, min}}$  та може бути реалізовано в конкретному вимірювальному приладі.

Враховуючи, що:

$$\Psi(t) = N_{\text{фц}} + \varphi(t),$$

можна вважати, якщо фазометр знаходиться поблизу “мертвої зони”, тоді:

$$\Psi(t) \equiv \varphi(t),$$

тобто зводиться до вимірювання “миттєвих фазових зсувів” відомими

методами [13, 40, 41, 155], або новими їх різновидностями [42, 43, 46, 70, 246, 256].

2 - вимірювання середніх значень:

$$\Psi_{сер}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Psi_i(t),$$

що є іншою протилежністю “миттєвої  $\Psi_i(t)$ ” і є фізично реалізуючим на практиці методом, що в повній мірі відповідає загальній математичній моделі:

$$\Psi_{сер}(t) = N_{\phi u} + \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N \phi_{in}(t) + \sum_{i=1}^N \phi_{ik}(t) \right].$$

Залежність від  $t$  в даному виразі вказує на залежність від номера вимірювання початкових  $\phi_{in}(t)$  та кінцевих  $\phi_{ik}(t)$  значень кута фазового зсуву, при цьому вимірюваний параметр умовно поділяють на короткотривалий ( час вимірювання - мс, с) або довготривалий (десятки секунд -хвилини) [40, 70].

Розуміючи відносність такого поділу, будемо вважати, що всі вимірювання, які використовують алгоритми інші ніж “миттєвих значень” і мають на увазі будь-який вид накопичення результатів точкових вимірювань називатимемо вимірюваннями середніх значень:

$$\bar{\Psi}(t) = \frac{1}{T_{вим}} \int_0^{T_{вим}} \Psi(t) dt.$$

Оскільки для знаходження частоти:

$$f(t) = \frac{d\Psi(t)}{2\pi dt},$$

дана модель зводиться до її дискретного аналога і технічно реалізується шляхом заміни  $d\Psi \rightarrow \Delta\Psi$ ,  $dt \rightarrow \Delta t$ , то цілком зрозумілим є виділення вимірювання приростів:

$$\Delta\Psi(t) = \Psi_{\kappa}(t) - \Psi_n(t),$$

де  $\Psi_k(t)$ ,  $\Psi_n(t)$  -відповідно кінцеві та початкові значення  $\Psi(t)$ ,

які можуть бути як середні  $\bar{\Psi}(t)$ , так і миттєві  $\Psi_i(t)$ .

Необхідно виділити ще один важливий напрямок - це компенсаційні вимірювання  $\Psi(t)$ ,  $\Psi_{сер}(t)$ ,  $\Delta\Psi(t)$ , який реалізується із використанням компенсуючих значень та нульового методу вимірювань [40, 41, 70], тому він в рівній мірі відноситься і до напрямку фазочастотного синтезу або є одночасно як задачею вимірювання ПФЗ, так і задачею формування розгортки  $\Psi(t)$ .

Компенсаційні методи, як відомо [40, 70, 78], потребують наявності регулюючої міри, яка здатна відтворити копію сигналу що підлягає вимірюванню і який буде зрівняний за допомогою "нульового" чи іншого із різновидів компенсаційних методів.

На відміну від завдання чистих вимірювань фазочастотних параметрів радіосигналів, при синтезі закону зміни  $\Psi(t)$  головну увагу потрібно приділяти досягненню максимально можливого наближення реально формуючого сигналу ( $\Psi_i(t)$ ,  $A_i(t)$  і т.п.) до моделі, враховуючи такі важливі особливості, як можливість представлення неперервного сигналу його відліками [245]. Тому найбільш перспективними є цифрові методи синтезу, котрі дозволяють розрахунковим чином разом із використанням квантованих і дискретизованих сигналів (каліброваних значень за амплітудою та в часі) - відобразити всі реально існуючі сигнали та створити нові унікальні можливості, серед яких виділяються:

- синтез сітки секвент (когерентно-фазових різночастотних) сигналів;
- здійснення зовнішньої частотної модуляції (ЧМ).

Крім того, розглядаючи імпульсні послідовності цифрових дворівневих сигналів, що формуються в базисах функцій Радемахера ( $rad(\varphi, \theta)$ ) та Уолша ( $wal(\varphi, \theta)$ ), потрібно виділити ще один специфічний напрямок:

- формування функцій трансверсії ( $trv(i, \theta)$ ), котрі мають специфічні властивості і можуть утворювати ортогональні набори функцій для передачі та кодування цифрових сигналів [43, 63].

Дослідження в галузі синтезу закону зміни  $\Psi(t)$ , окрім здійснення ЧМ, дозволили простими фазочастотними перетвореннями здійснити такі операції як, регулювання параметрів ЧМС (мається на увазі зміна девіації, індексу модуляції, без зміни  $f_0$ , при цьому

“фаза” вхідного сигналу зберігається , а регулювання може

збільшити  $f_{\partial} \leq \frac{1}{4} f_0$  або ж повністю “зняти модуляцію” ЧМС.

Ще одним із цікавих явищ є формування “згорнутих” ЧМС, які можна отримати лише використовуючи явище зовнішньої ЧМ, і можуть знайти застосування для закриття аналогових каналів зв'язку та зменшення смуги каналу передачі.

В даний вид перетворень входять і такі необхідні, як для вимірювань так і для обробки радіосигналів перетворення, як:

- трансверсія фазових співвідношень (перенесення вверх (вниз)) фазових співвідношень імпульсних цифрових послідовностей;
- формування квадратурних сигналів ( формування “квадратури в середньому” на сигналах із різною секвентністю  $trv(i, \theta)$  ).

Особливо потрібно виділити споріднені перетворення зміни просторово-часових параметрів при розповсюдженні радіосигналів:

- компенсація частоти Доплера радіосигналів;
- імітація “ $\tau$ ”, тобто створення штучних  $f_{\partial on}$  та  $\Delta \tau$ , що є завданням протирадіолокаційного маскування цілей та утворення невідповідності групи параметрів  $R, V_{рад}$ .

Таким чином, спираючись на теорію ФЧВ і ПР можливо не лише досить нескладними технічними засобами на високому метрологічному рівні моделювати, створювати та регулювати фазочастотні параметри радіосигналів, але і отримати нові унікальні можливості, які відсутні при класичних підходах [40, 70].

Стосовно вимірювань ПФЗ- то по новому можуть бути вирішені цілий ряд важливих вимірювань фазочастотних параметрів ЧМС прямими методами [177, 216]. До основних із яких можна віднести:

-вимірювання  $f, \Delta F$  ( використовуючи миттєві значення  $\Psi_i(t)$  та знаходячи відповідні похідні);

-вимірювання  $\Delta \varphi, \frac{\Delta f}{f}$  (вимірювання фазових та частотних зсувів за допомогою кумулятивного фазометра [24-28];

-вимірювання параметрів ЧМС ( девіація -  $f_{\partial}$ , індексу модуляції ЧМ -  $m$  ), з високою точністю та малим часом вимірювання, завдяки використанню прямих методів [177, 216].

До класичного забезпечення інтерферометричних вимірювань, вимірювання ПФЗ дозволяє значно покращити метрологічні

характеристики таких важливих вимірювань як:

- динамічна торсіометрія (розв'язання проблеми чутливості/динамічний діапазон, які обмежують можливості чисто фазового методу [21, 196, 219];

- вимірювання нестабільності опорних генераторів систем зв'язку та навігації (дає змогу зняти фазочастотну характеристику режиму поведінки генератора відносно еталону) [229].

Можливі і багато інших галузей застосування методів та засобів ФЧВ і ПР, але в загальному це будуть комбінації чи видозміни перелічених вище.

В розділі компенсаційних вимірювань необхідно підкреслити цікавий метод нетрадиційного вимірювання частоти ( не знаходження

$f = 1/T$  чи методом лічби числа імпульсів за  $T_{вим}$  ), а реалізацією методу послідовного наближення, що принципово розв'язує проблему оптимального обміну точності частотних вимірювань  $\delta f$  на їх тривалість -  $T_{вим}$ , особливо, коли апіорі тривалість сигналу невідома.

В слідкуючому режимі, для вимірювання параметрів ЧМС знайде використання компенсаційний девіометр [177, 213, 216].

Для покращання висвітлення особливостей та можливостей теорії ФЧВ і ПР і її наглядного демонстрування на рис.2.2 зображена узагальнена класифікаційна таблиця, в якій здійснена спроба відобразити напрямок, вид сигналів (істотної ролі не відіграє, але завжди може бути реалізований цифровими сигналами), вид перетворення, тип вимірюваного параметра та можливі галузі застосування.

Розроблена та приведена загальна класифікаційна таблиця методів теорії ФЧВ і ПР складається із двох напрямків та завдань:

- завдання вимірювання ПФЗ;

- завдання формування розгортки  $\Psi(t)$  у часі (формування радіосигналів).

До першої групи входять такі важливі види вимірювання ПФЗ як: інтерферометрія; динамічна торсіометрія; вимірювання девіації та індексу модуляції; вимірювання характеристик нестабільності опорних генераторів; вимірювання частоти сигналів із тонкою структурою, і можуть мати реалізації в аналоговій, імпульсно-дискретній та цифровій формі.

До другої групи входять такі важливі реалізації закону зміни  $\Psi(t)$ , як: синтез сітки когерентно-фазових частот; здійснення зовнішньої ЧМ; формування ортогональних дискретних функцій; керування параметрами девіації та індексу модуляції; аж до повного зняття модуляції;

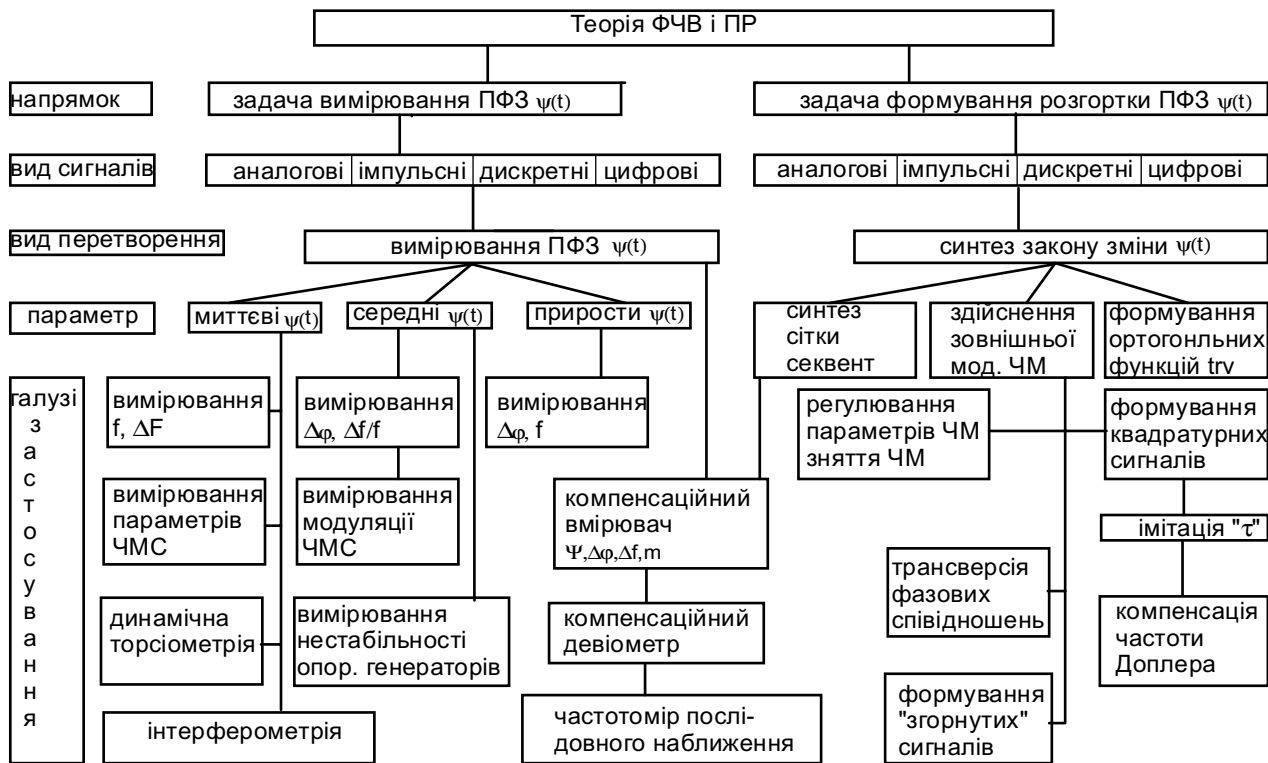


Рис. 2. Узагальнена класифікаційна таблиця основних напрямків застосування теорії ФЧВ і ПР

трансверсія фазових співвідношень сигналів; формування квадратурних сигналів; імітація часу затримки “ $\tau$ ”; компенсація частоти Доплера; формування “згорнутих” ЧМС і.т.д.

## 2.4. Особливості аналізу моделей радіоімпульсних сигналів

Як було визначено в першій главі, всі сигнали із кінцевою тривалістю можна представити як набір відрізків синусних коливань, то дослідження таких процесів та сигналів можна розглядати як задачу синтезу радіосигналу у вигляді радіоімпульсів.

Вказаний підхід не новий, але при його реалізації виникають значні труднощі пов'язані із неадекватністю моделей, що є результатом застосувань визначення “частота”, яке для радіосигналів повинно вживатися із певними обмеженнями. Прикладом таких специфічних проявів невідповідності класичної моделі реальному процесу формування радіосигналів є методи дослідження спектрального складу радіоімпульсного процесу, що утворюється із відрізків синусних сигналів.

Розглянемо типовий радіоімпульсний процес, що складається із відрізків синусних коливань, які йдуть один за одним. Для спрощення викладень обвідну імпульсів приймемо прямокутною, а амплітуду - рівній одиниці (рис.2.3).

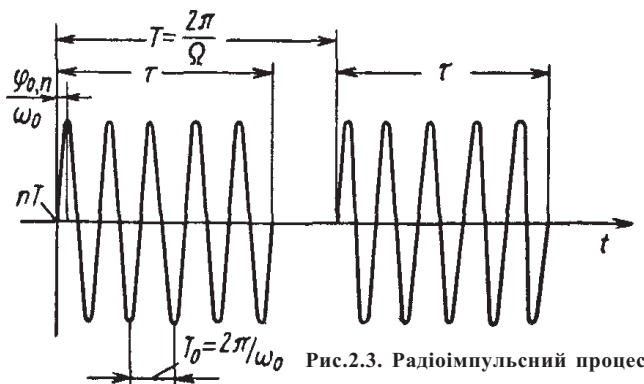


Рис.2.3. Радіоімпульсний процес

Аналітично цей процес може бути записаний у вигляді [47]:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[\omega_0(t - nT) + \varphi_{0,n}] \quad \begin{matrix} \text{при } nT < t \leq nT + \tau \\ \text{при } nT + \tau < t \leq (n+1)T \end{matrix}, \quad (2.1)$$

де  $n$  - ціле число;

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ кругова частота заповнення;}$$

$\varphi_{0,n}$  - початкова фаза  $n$ -го імпульсу;

$\tau$  - тривалість імпульсу;

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ - період проходження імпульсів.}$$

Необхідно знайти спектр, що відповідає функції  $s(t)$ . Розв'язання цієї задачі наштовхується на значні труднощі. Справа в тому, що функція  $s(t)$  (в загальному випадку) не відповідає вимозі періодичності (через зміну початкової фази від імпульсу до імпульсу) і тому її спектральний склад не може бути визначений за допомогою рядів Фур'є для періодичних функцій [47, 63, 103]. З іншого боку, функція  $s(t)$ , займаючи всю тимчасову вісь від  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ , не відповідає вимозі абсолютної інтегрованості, що не дозволяє безпосередньо використовувати інтеграл Фур'є для визначення її спектра.

Можна використовувати два методи для визначення спектра цієї функції: підсумовування інтегралів Фур'є від її окремих ділянок і розкладання в ряд Фур'є для майже періодичних функцій. Розглянемо застосування цих методів стосовно моделі рідіоімпульсного процесу використовуючи методику аналогічну [47, 245].

Спочатку розглянемо використання підсумовування інтегралів Фур'є. Візьмемо відрізок синусоїди з одиничною амплітудою (рис. 2.4):

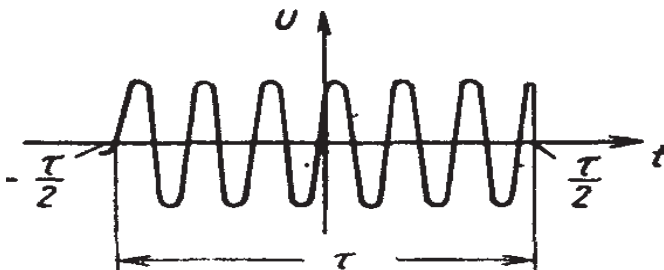


Рис.2.4. Відрізок синусоїди із одиничною амплітудою



$$s(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & \text{нпу} \quad -\tau/2 < t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{нпу} \quad \tau/2 < t \leq -\tau/2 \end{cases} \quad (2.2)$$

З огляду на те, що:

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2}, \quad (2.3)$$

знайдем за допомогою інтеграла Фур'є спектр функції  $s(t)$ :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{j\varphi_0} \left( \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{2(\omega - \omega_0)} \right) + e^{-j\varphi_0} \left( \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{2(\omega + \omega_0)} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тепер, користуючись відомими зі спектрального аналізу [47] теоремами додавання і запізнювання, визначимо спектр функції (2.2). Згідно теореми запізнювання, якщо  $s(t)$  має спектр  $S(\omega)$ , тоді функція  $s(t + T)$  має спектр  $S(\omega)e^{-j\omega T}$ , а функція  $s(t + nT)$  - спектр  $S(\omega)e^{-jn\omega T}$ .

З огляду на те, що кожний імпульс послідовності (2.2) має свою початкову фазу, що залежить тільки від номера імпульсу, одержимо спектр цієї функції у вигляді:

$$S(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{2(\omega - \omega_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(n\omega T - \varphi_{0,n})} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{2(\omega + \omega_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(n\omega T + \varphi_{0,n})}. \quad (2.5)$$

Позначимо  $\frac{\varphi_{0,n}}{nT} = \lambda$ , де  $\lambda(\varphi_{0,n}, n)$  - величина, яка пов'язана із

законом зміни початкової фази від імпульсу до імпульсу. Тоді вираз (2.5) можна переписати так:

$$S(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{2(\omega - \omega_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT(\omega - \lambda)} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{2(\omega + \omega_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT(\omega + \lambda)} \quad (2.6)$$

Представимо (2.6) у більш наочному вигляді. З теорії узагальнених функцій [47] відомо, що:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) \quad (2.7)$$

де  $\delta(x)$  -дельта-функція.

Використовуючи це співвідношення і з огляду на, що

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \text{ запишемо:}$$

$$S(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{2(\omega - \omega_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \lambda - n\Omega) + \\ + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{2(\omega + \omega_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \lambda + n\Omega) \quad . \quad (2.8)$$

Скориставшись зворотним перетворенням Фур'є, тепер неважко з виразу (2.8) одержати функцію (2.1) у вигляді тригонометричного ряду:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau / 2}{\omega - \omega_0} e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \lambda - n\Omega) d\omega + \\ \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau / 2}{\omega + \omega_0} e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \lambda + n\Omega) d\omega \quad . \quad (2.9)$$

Міняючи порядок підсумовування і інтегрування та використовуючи властивість дельта-функції, що фільтрує, одержимо значення функції (2.1) у виді ряду Фур'є в комплексній формі:

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda - \omega_0 + n\Omega)\tau}{2(\lambda - \omega_0 + n\Omega)} e^{j(\lambda + n\Omega)t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda - \omega_0 - n\Omega)\tau}{2(\lambda - \omega_0 - n\Omega)} e^{j(\lambda - n\Omega)t} \right] \quad (2.10)$$

Вводячи позначення:

$$U(\omega) = \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\lambda - \omega_0 + n\Omega)\tau}{2(\lambda - \omega_0 + n\Omega)\tau/2}, \quad (2.11)$$

бачимо, що  $U_n$  є коефіцієнтами ряду Фур'є в комплексній формі. і в результаті підсумовування двох комплексних рядів ми одержимо ряд (2.10) у тригонометричній формі:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\lambda + n\Omega)t \quad (2.12)$$

Із виразів (2.5) і (2.8) видно, що спектр функції (2.1) складається із гармонік, частоти яких залежать від закону зміни початкової фази височастотного заповнення від імпульсу до імпульсу і частоти повторення імпульсів. Закон зміни початкової фази фактично визначає положення всього спектра на осі частот. Обвідна спектра описується функцією виду  $\sin x/x$  (рис. 2.5), причому максимум обвідної завжди

знаходиться на частоті заповнення  $\omega_0$ .

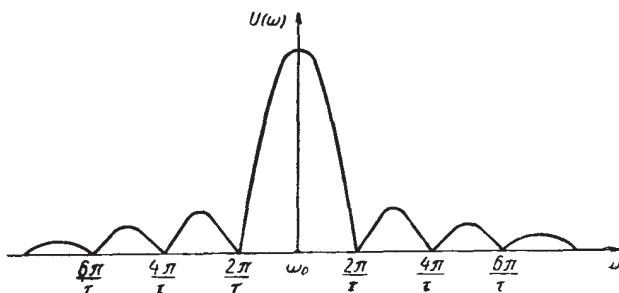


Рис.2.5

Як видно із наведеного вище слідує, що запропонований класичний підхід рядів Фур'є не може бути застосований із-за неадекватності моделі, тому був запропонований інший підхід, що опирається на ряди Фур'є для майже періодичних функцій.

Спектр функції (2.1) був знайдений декілька штучним методом. Однак для його визначення є і прямий шлях. За визначенням, введеним в теорію функцій Н. Бором у 1925 р. [47], ця функція відноситься до класу майже періодичних функцій і її спектральний аналіз може бути зроблений за допомогою математичного апарата таких функцій.

Розглянемо особливості майже періодичних функцій. Як відомо, для будь-якої періодичної функції  $f_1(t) (-\infty < t < \infty)$  з періодом  $T_1$ , існують дійсні числа:

$$T_n = nT_1 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

що задовольняють умові:

$$f_1(t + T_n) - f_1(t) = 0, \quad (2.13)$$

при всякому  $t$ . При цьому все число  $T_n$  утворить арифметичну прогресію.

Н. Бор узагальнив це визначення і назвав майже періодичну таку функцію  $f(t)$ , для якої при будь-якому позитивному числі  $\varepsilon$  можна знайти "майже період"  $T(\varepsilon) = T_\varepsilon$ , що задовольняє умові) [47]:

$$|f(t + T_\varepsilon) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad (2.14)$$

при всякому  $t$ , причому числа  $T_\varepsilon$  розташовані не рідше деякої арифметичної прогресії. Очевидно, що для періодичних функцій  $T_n$  є також і майже періодом. Тому чисто періодичні функції входять у клас майже періодичних [47].

Найбільш повно досліджені неперервні майже періодичні функції [47]. Розглянемо коротко властивості цих функцій і їхніх спектрів, а потім узагальнення цих властивостей на розривні майже періодичні функції, до яких відноситься і функція (2.1).

Основні властивості майже періодичних функцій неважко

вивести із приведеного вище визначення. Так, із огляду на те, що зміна функції  $f(t)$  для будь-яких  $t$  відтворює з точністю до  $\varepsilon$  її зміну у деякому інтервалі  $T$  (наприклад  $0 < t < T$ ), ми переконуємося, що  $f(t)$  обмежена для всіх  $t$  [47].

Виходячи з цього, неважко також показати, що  $f(t)$  рівномірно безупинна на всій числовій прямій. Звідси випливає, що для всякого  $\theta > 0$  існує позитивне число  $h$ , таке, що нерівність [47]:

$$|f(t + v) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |v| < h, \quad (2.15)$$

справедливо для всіх значень  $t$  (рис.2.6). А це означає, що число  $v$  є, в свою чергу, майже періодом функції  $f(t)$ .

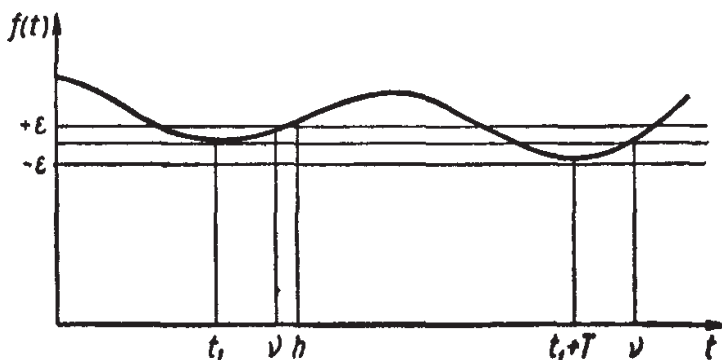


Рис.2.6. Майже періодична функція

Таким способом, майже періоди цієї функції зображуються на осі абсцис не точками, а інтервалами. За допомогою елементарного арифметичного підрахунку можна показати, що ці інтервали для двох різних майже періодичних функцій після кінцевого числа повторень перекриваються. Будь-яка загальна точка таких інтервалів, що перекриваються, буде загальним майже періодом цих функцій. Тепер неважко бачити, що такі дві функції дадуть у сумі нову майже періодичну функцію. В результаті ми приходимо до важливої властивості майже періодичних функцій - їх інваріантності при додаванні. Згадаємо, що сума двох чисто періодичних функцій у загальному випадку (наприклад, при ірраціональному відношенні періодів) не є чисто періодичною функцією. Але з огляду на те, що чисто періодична функція є окремий

випадок майже періодичної, ми одержуємо, користуючись введеним поняттям інваріантності, дуже істотним для спектрального аналізу майже періодичних функцій наслідком: сума кінцевого числа безперервних майже періодичних функцій із довільними періодами, наприклад, можна сума виду [47, 245]:

$$\sum_{n=1}^N U_n e^{i\omega_n t} \quad (2.16)$$

є майже періодична функція.

Легко показати, що і квадрат і добуток майже періодичних функцій є функція майже періодична і, взагалі, будь-яка раціональна операція над майже, періодичними функціями дає завжди функцію майже періодичну (крім розподілу на функції, що приймають значення довільно близькі до нуля). Межа рівномірно збіжної послідовності рівномірних майже періодичних функцій також є рівномірна майже періодична функція [47, 245].

Для вивчення спектрального складу майже періодичних функцій велике значення має одна загальна властивість цих функцій, що можна сформулювати так: для кожної майже періодичної функції  $f(t)$  існує середнє значення [47]:

$$M[f(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt. \quad (2.17)$$

У окремому випадку чисто періодичної функції  $f_1(t)$  з періодом  $T_1$  ця властивість очевидно і середнє значення яке дорівнює [47]:

$$\frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} f_1(t) dt. \quad (2.18)$$

Тепер візьмемо вираз:

$$f(t) e^{-i\alpha t}, \quad (2.19)$$

який, будучи добутком майже періодичної функції на чисто періодичну, є майже періодичною функцією. Середнє значення виразу (2.18) є деякою функцією  $u(\omega)$  [47]:

$$u(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.20)$$

Фундаментальне значення для всієї теорії майже періодичних функцій має наступний факт: яка б не була майже періодична функція  $f(t)$ , функція  $u(\omega)$  тотожно дорівнює нулю всюди, за винятком, самої більшої, рахункової множини значень  $\omega$ . Ці виняткові значення функції  $u(\omega)$  можна пронумерувати і позначити [47]:

$$u(\omega_1) = U_1, u(\omega_2) = U_2, \dots, u(\omega_n) = U_n. \quad (2.21)$$

Таким чином, ми прийшли до поняття ряду Фур'є для майже періодичної функції. Числа  $\omega_n$  є показниками Фур'є функції  $f(t)$ , а числа  $U_n$  - її коефіцієнтами Фур'є, тобто для кожної майже періодичної функції можна скласти свій ряд Фур'є [47, 245]:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{i\omega_n t}. \quad (2.22)$$

У теорії майже періодичних функцій, так само як і чисто періодичних функцій, має місце рівність Парсеваля, теорема одиничності, теорема апроксимації і т.п. Однак доказ цих теорем значно складніше, чим аналогічних теорем теорії чисто періодичних функцій. Математичні труднощі зростають при переході до класу узагальнених майже періодичних функцій, куди входять і розривні (що інтегруються по Лебегу) майже періодичні функції. Питаннями, зв'язаними з таким узагальненням, займалися найвизначніші математики В. Степанов, Н. Вінер, А. Безикович, що створили узагальнені класи майже періодичних функцій, названі їхніми іменами. Однак нам немає необхідності вдаватися в подробиці цієї теорії. Н. Бор у [47] показав, що "кожної функції будь-

якого із розглянутих узагальнених класів дійсно можна поставити у відповідність свій ряд Фур'є; це легко випливає з того, що теорема про середнє значення теорії звичайних (неперервних) майже періодичних функцій поширюється і на узагальнені майже періодичні функції". Це дає нам право перейти до розгляду спектра функції (2.1), користуючись викладеною вище теорією [47].

Визначимо значення частот, при яких функція  $u(\omega)$  для майже періодичної функції (2.1) не дорівнює нулю.

Разкладемо  $\cos[\omega_0(t - nT) + \varphi_{0,n}]$  аналогічно (2.12) і з огляду на (2.19), запишемо для довільного інтервалу  $T$  [47]:

$$u(\omega) = \lim_{T^* \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^*} \left\{ \int_{-T^*}^{T^*} e^{i[\omega_0(t-nT)+\varphi_{0,n}]} e^{-i\omega t} dt + \int_{-T^*}^{T^*} e^{-i[\omega_0(t-nT)+\varphi_{0,n}]} e^{i\omega t} dt \right\}. \quad (2.23)$$

Для скорочення запису оперуємо лише з першим інтегралом виразу (2.22). Другий інтеграл врахуємо при одержанні кінцевого результату.

Вважаючи  $T^* = nT$ , перепишемо вираження (2.22) так [47]:

$$u(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4nT} \int_{-nT}^{nT} e^{i[\omega_0(t-nT)+\varphi_{0,n}]} e^{-i\omega t} dt. \quad (2.24)$$

Розіб'ємо інтервал інтегрування на  $2\pi$  ділянок і, з огляду на те, що в кожній ділянці функція (2.24) існує тільки протягом часу  $\tau$ , отримаємо [47]:

$$u(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4nT} \left\{ e^{i\varphi_{0,-n}} \int_{-nT-\tau/2}^{-nT+\tau/2} e^{i\omega_0(t+nT)} e^{-i\omega t} dt + \dots \right. \\ \left. + e^{i\varphi_{0,-1}} \int_{-T-\tau/2}^{-T+\tau/2} e^{i\omega_0(t+T)} e^{-i\omega t} dt + e^{i\varphi_{0,0}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt + e^{i\varphi_{0,1}} \int_{T-\tau/2}^{T+\tau/2} e^{i\omega_0(t-T)} e^{-i\omega t} dt \right\} \quad (2.25)$$



Заміною перемінних  $t_1 = t - nT$  перетворимо всі інтеграли, що входять у (2.24), до меж  $-\tau/2$ ,  $\tau/2$  і, виносячи з-під знаку інтеграла множники, незалежні від  $t$ , отримуємо [47]:

$$u(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4nT} \sum_{-n}^{n-1} e^{-i(n\omega T - \varphi_{0,n})} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt. \quad (2.26)$$

Необхідно з'ясувати, при яких значеннях  $\omega$  цей вираз не дорівнює нулю. Користуючись введеним позначенням  $\frac{\varphi_{0,n}}{nT} = \lambda$ , запишемо суму з (2.25) так [47]:

$$\sum_{-n}^{n-1} e^{-inT \left( \omega - \frac{\varphi_{0,n}}{nT} \right)} = \sum_{-n}^{n-1} e^{-inT(\omega - \lambda)} \quad (2.27)$$

Вираз (2.26) є сумою  $2n$  одиничних векторів, кожний із яких обертається навколо кінця попереднього, причому за один оборот першого вектора другий вектор робить два обороти, третій-три,  $n$ -й -  $n$ -обертів [47].

Функція  $u(\omega)$  не дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли вдасться позбутися від  $n$  у знаменнику. Це можливо за умови, що усі вектори будуть витягнуті одночасно вздовж дійсної осі, тому що приймуть значення рівні одиниці, а їхня сума буде дорівнює  $2n$ . Тоді вираз (2.17) прийме вигляд [47]:

$$u(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt. \quad (2.28)$$

Очевидно, що сума (2.16) буде дорівнює  $2n$ , при виконанні умови [47]:

$$T(\omega - \lambda) = 2\pi n (m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots), \quad (2.29)$$

тобто при значеннях:

$$\omega = \omega_m = \lambda + m\Omega . \quad (2.30)$$

Підставляючи в (2.26) із (2.28) і інтегруючи, одержимо коефіцієнти Фур'є, рівні (знову переходимо до індексів  $n$ ) [47]:

$$U_n = \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\lambda - \omega_0 + n\Omega)\tau / 2}{(\lambda - \omega_0 + n\Omega)\tau / 2} . \quad (2.31)$$

Таким чином, можна відповідно до (2.21) записати ряд Фур'є функції (2.31):

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{i(\lambda + n\Omega)t} . \quad (2.32)$$

Із врахуванням рішення другого інтеграла -із (2.22) одержимо вираз ряду Фур'є функції (1) у тригонометричній формі [47]:

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\lambda + n\Omega)t , \quad (2.33)$$

що збігається з виразом (2.12) попереднього розгляду методом інтегралу Фур'є.

І проведеного вище аналізу виходить, що класичні моделі не можуть бути піддані детальному опису в рамках класичних визначень вже при елементарних сигналах, що являють собою АІМ (маніпуляцію із зміною фази носійної). Використання штучних методів, подібного до описаного вище, або використання теорії майже періодичних функцій не може слугувати тим адекватним торетичним базисом для теорії вимірювання фазочастотних параметрів радіосигналів, що й було чітко продемонстровано на прикладі знаходження спектра сигналу (2.1).

В той же час питання аналізу сигналів при фазочастотному синтезу (які детально розглянуті з позицій теорії ФЧВ іПР в третій главі монографії), можуть розглядатися ще одним синтетичним методом [220-226], із використанням відомих співвідношень, які використовуються для опису АІМ сигналів. Використовуючи апарат перетворення Фур'є для знаходження спектральних складових від окремих частин сигналу та

враховуючи періодичність їх фазового зсуву, можна прийти до результатів, аналогічних отриманим вище [42].

Але необхідно відзначити, що всі розглянуті класичні методи не дають відповіді та не дають результату у замкнутій формі, коли співвідношення частот довільне, і зсув фази кожного радіоімпульсу є ірраціональним, тоді питання про спектральні складові сигналу (квазігармонічного) втрачає сенс, але такі сигнали існують, так як в реальних радіосигналах початкові фази завжди нестационарні [47, 245].

## 2.5. Часові та спектральні характеристики дискретних фазообертачів

Задача перенесення частоти із збереженням фазових співвідношень у радіовимірній техніці в основному вирішується класичним способом, тобто з використанням односмугових модуляторів з фазовим подавленням неробочої (дзеркальної) складової результату перетворення [13, 17, 77, 78].

Альтернативним способом є застосування методу з використанням фазообертачів в динамічному режимі роботи. Вирішенню даної задачі присвячено ряд робіт [13, 17, 77, 78]. Метод досліджений в основному при реалізації його на аналогових електромеханічних фазообертачах [77, 78], а в дискретному вигляді він відомий як частотозсуваючий перетворювач на тригерних подільниках частоти [13].

Даний підрозділ присвячений ще одній спробі дослідження теоретичної моделі перетворювача частоти, реалізованого на фазообертачах в динамічному режимі роботи з використанням аналогових електронних комутаторів і формує сигнал аналогічний розглянутому в підрозділі 2.4, що дає змогу оцінити потенційні можливості даного методу формування та перетворення радіосигналів [169, 170].

Узагальнена схема, яка реалізує дискретний метод перетворення частоти з використанням фазообертачів в динамічному режимі роботи, представлена на рис.2.7.



Рис.2.7. Функціональне використання фазообертачів в динамічному режимі роботи

Тут А - багатофазний фазорозщеплювач з дискретністю [170]:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}, \text{ де } n = 3, 4, 5, \dots; \quad (2.34)$$

S - комутатор, який послідовно підключає на вихід дискретні сигнали  $S_0(t)$  з різним фазовим станом [169, 170]:

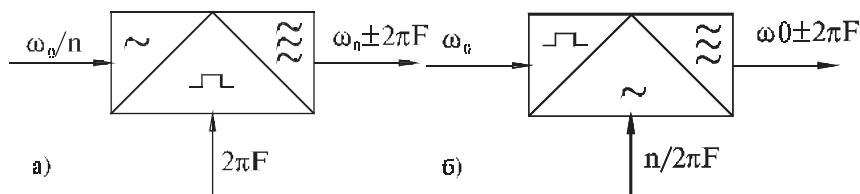
$$S_0(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.35)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ S_2(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t \pm \Delta\varphi + \varphi_0) \\ &\dots\dots\dots \\ S_i(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t \pm (i-1)\Delta\varphi + \varphi_0) \\ &\dots\dots\dots \\ S_n(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi \mp \Delta\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Перемикання комутатора відбувається згідно вибраного закону сигналу управління  $S_{\text{упр}}(t)$ .

Можна виділити дві функціональні схеми перетворювача [170]:

- із низькочастотним управлінням (рис.2.8а);
- із високочастотним управлінням (рис. 2.8б);



**Рис.2.8. Функціональна схема перетворювача із:**  
а) низькочастотним управлінням; б) високочастотним управлінням

У випадку, коли частота сигналу управління комутатора менша частоти гармонічного сигналу (функціональна схема рис.2.8а), перетворювач (рис.2.7) можна розглядати як n амплітудних модулаторів та суматор (рис.2.9) [169,170].

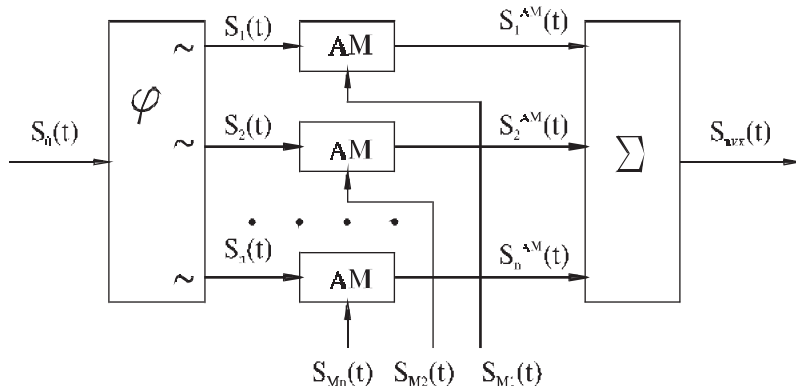


Рис.2.9. Еквівалентна схема перетворювача із низькочастотним керуванням

Розглянемо перетворення з негативним приростом фази. Модуючі функції при цьому будуть мати вигляд (рис.2.10). Для перетворення з негативним приростом фази, необхідною умовою, повинно бути те, щоб гармоніка  $S_i(t)$  з фазовим станом  $(i-1)\Delta\varphi$  відповідно модулювалась сигналом  $S_{mi}(t)$  (рис.2.10). Тобто, в кожному дискрету часу:

$$\Delta t = \tau_i = \frac{T}{n} \quad (2.37)$$

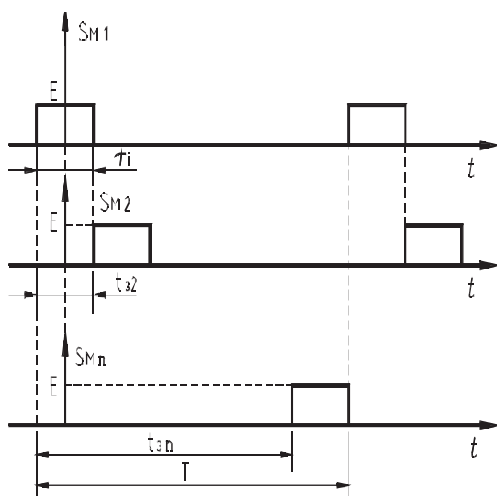


Рис. 2.10. Модуючі функції перетворення з негативним приростом фази

сигнал на виході  $S_{вих}(t)$  повинен отримувати додатковий приріст фази рівний:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n},$$

де  $T$  - період повного фазового циклу ;

$n$  - кількість фазових станів.

Цій умові цілком задовільняє еквівалентна схема (рис.2.9).

Модуючі функції  $S_{MI}(t)$  (рис.2.10) - це послідовності однополярних прямокутних імпульсів [170]:

$$S_{MI}(t) = E \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[ \frac{t - \tau_i(i-1) - kT}{\tau_i} \right], \quad (2.38)$$

$$\text{де } \text{rect} \left( \frac{t}{\tau_i} \right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau_i/2 \\ 0, & |t| > \tau_i/2 \end{cases}$$

Дана функція розкладається в тригонометричний ряд Фур'є [170]:

$$S_{MI}(t) = E \left[ \frac{\tau_i}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\Omega\tau_i}{2} \cos(k\Omega t - k\Omega t_s) \right], \quad (2.39)$$

де  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $t_s$  - величина зсуву послідовності імпульсів вздовж вісі часу.

Враховуючи, що  $\tau_i = \frac{T}{n}$  та  $t_s = t_i(i-1)$ , отримаємо [187, 188]:

$$S_{MI}(t) = E \left\{ \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{n} \cos \left[ k \frac{2\pi}{T} t - k \frac{2\pi}{n} (i-1) \right] \right\} \quad (2.40)$$

В результаті амплітудної модуляції функцій  $S_i(t) = E \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$  періодичними сигналами  $S_{MI}(t)$  отримаємо періодичні послідовності радіоімпульсів. Враховуючи, що функції  $S_{MI}(t)$

представлені рядом Фур'є (2.40), то послідовність радіоімпульсів, розкладену в тригонометричний ряд Фур'є згідно з [170], можна представити:

$$S^{AM}(t) = \frac{E}{n} \cos(\omega_0 t + \varphi_H) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_H + \varphi_M] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \cos[(\omega_0 - k\Omega)t + \varphi_H - \varphi_M], \quad (2.41)$$

де  $\varphi_H$  - початкова фаза носійного коливання, яка для гармоніки з  $i$ -им фазовим станом визначається згідно з співвідношенням (2.36):

$$\varphi_H = -(i-1)\Delta\varphi + \varphi_0 = -(i-1)\frac{2\pi}{n} + \varphi_0, \quad (2.42)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n$  - номер фазового стану;

$n = 3, 4, 5, \dots$  - кількість фазових станів в схемі перетворювача;

$\varphi_M$  - початкова фаза  $k$ -ї гармоніки  $i$ -ї модулюючої функції, визначається згідно із співвідношенням (2.40) [169, 170]:

$$\varphi_M = \varphi_{k,i} = -k(i-1)\frac{2\pi}{n}, \quad (2.43)$$

де  $k = 1, 2, \dots$  - номер гармоніки;

$i = 1, 2, \dots, n$  - номер модулюючої функції (рис.2.10).

Розпишемо співвідношення (2.41) з урахуванням (2.42) та (2.43) [169, 170]:

$$S_i^{AM}(t) = \frac{E}{n} \cos\left[\omega_0 t - (i-1)\frac{2\pi}{n} + \varphi_0\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{2\pi k}{T}\right)t - (i-1)\frac{2\pi}{n} + \varphi_0 - k(i-1)\frac{2\pi}{n}\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \cos\left[\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{T}\right)t - (i-1)\frac{2\pi}{n} + \varphi_0 + k(i-1)\frac{2\pi}{n}\right] \quad (2.44)$$

Амплітуди гармонік спектра сигналів  $S_i^{AM}(t)$  відповідно до

(2.44) будуть визначатись:

$$A_{\omega_0 \pm k\Omega} = \frac{E}{\pi k} \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|. \quad (2.45)$$

Початкові фази спектральних складових  $i$ -их функцій згідно з співвідношенням (2.44) будуть визначатись:

$$\varphi_{k,i} = \begin{cases} -(i-1)\frac{2\pi}{n} + \varphi_0 + (i-1)\frac{2\pi k}{n} - \text{для нижньої бокової смуги} \\ -(i-1)\frac{2\pi}{n} + \varphi_0 - (i-1)\frac{2\pi k}{n} - \text{для верхньої бокової смуги} \end{cases} \quad (2.46)$$

Співвідношення (2.45) після спрощення матиме вигляд:

$$\varphi_{k,i} = \begin{cases} 2\pi(i-1)\frac{k-1}{n} + \varphi_0 - \text{для нижньої бокової смуги} \\ -2\pi(i-1)\frac{k+1}{n} + \varphi_0 - \text{для верхньої бокової смуги} \end{cases} \quad (2.47)$$

Із співвідношення (2.47) випливає:

$$\varphi_{k,j} = \varphi_0, \text{ при } k = \begin{cases} mn+1, \text{ де } m = 0,1,2,\dots - \text{для нижньої бокової смуги} \\ mn-1, \text{ де } m = 1,2,3,\dots - \text{для верхньої бокової смуги} \end{cases} \quad (2.48)$$

Як бачимо, для спектральних складових, номер яких відповідає співвідношенню (2.48), початкові фази будуть рівні  $\varphi_0$  для будь якого  $i$ -го сигналу  $S_i^{AM}(t)$ .

Оскільки сигнал на виході перетворювача (рис 2.7) [170]:

$$S_{\text{вих}}(t) = \sum_{i=1}^n S_i^{AM}(t), \quad (2.49)$$

то спектр сигналу на виході перетворювача:



$$S_{aux}(\omega) = \sum_{i=1}^n S_i^{AM}(\omega) \quad (2.50)$$

Знайдемо амплітуду  $k$ -ої гармоніки спектра сигналу на виході перетворювача як суму  $k$ -их гармонічних складових спектрів функцій  $S_i^{AM}(t)$ :

$$\dot{A}_k = \sum_{i=1}^n \dot{A}_{k,i} \quad (2.51)$$

Представимо вираз (2.51) з урахуванням того, що модулі амплітуд спектральних складових спектра сигналів  $S_i^{AM}(t)$  однакові і визначаються співвідношенням (2.45), а також враховуючи співвідношення (2.47):

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= \left| \dot{A}_k \right| \sum_{i=1}^n \exp(j\varphi_{k,i}) = A_{\omega_0 \pm k\Omega} \sum_{i=1}^n \exp(j\varphi_{k,i}) = \\ &= \begin{cases} A_{\omega_0 \pm k\Omega} \exp(j\varphi_0) \sum_{i=1}^n \exp\left[j2\pi(i-1)\frac{k-1}{n}\right] & \text{— для гармонік нижньої бокової смуги} \\ A_{\omega_0 \pm k\Omega} \exp(j\varphi_0) \sum_{i=1}^n \exp\left[-j2\pi(i-1)\frac{k+1}{n}\right] & \text{— для гармонік верхньої бокової смуги} \end{cases} \quad (2.52) \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (2.48) для будь-якого числа фазових станів перетворювача справедливо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \exp\left[j2\pi(i-1)\frac{k-1}{n}\right] &= \begin{cases} n, & \text{при } k = mn + 1, \\ 0, & \text{при } k \neq mn + 1, \end{cases} \\ &\quad \text{де } m = 0, 1, 2, \dots \\ \sum_{i=1}^n \exp\left[-j2\pi(i-1)\frac{k+1}{n}\right] &= \begin{cases} n, & \text{при } k = mn - 1, \\ 0, & \text{при } k \neq mn - 1, \end{cases} \\ &\quad \text{де } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.53)$$

Враховуючи (2.53) перепишемо (2.52) в іншому вигляді - окремо для модуля і фази спектральних складових:

- для спектральних складових нижньої бокової смуги:

$$\left| \dot{A}_m \right| = \frac{nE}{\pi(mn+1)} \left| \sin\left(\frac{mn+1}{n}\pi\right) \right|, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

- для спектральних складових верхньої бокової смуги:

$$|\dot{A}_m| = \frac{nE}{\pi(mn-1)} \left| \sin\left(\frac{mn-1}{n}\pi\right) \right|, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.55)$$

Фази спектральних складових:

$$\varphi_m = \varphi_i. \quad (2.56)$$

Таким чином, сигнал на виході перетворювача при перетворенні з негативним приростом фази, розкладений в тригонометричний ряд Фур'є, буде мати вигляд:

$$S_{\text{вих}}(t) = \frac{nE}{\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mn+1} \sin\left(\pi \frac{mn+1}{n}\right) \cos[(\omega_0 - (mn+1)\Omega)t + \varphi_0] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn-1} \sin\left(\pi \frac{mn-1}{n}\right) \cos[(\omega_0 + (mn-1)\Omega)t + \varphi_0] \right\} \quad (2.57)$$

Амплітудно-частотний спектр такого сигналу представлений на рис.2.11.

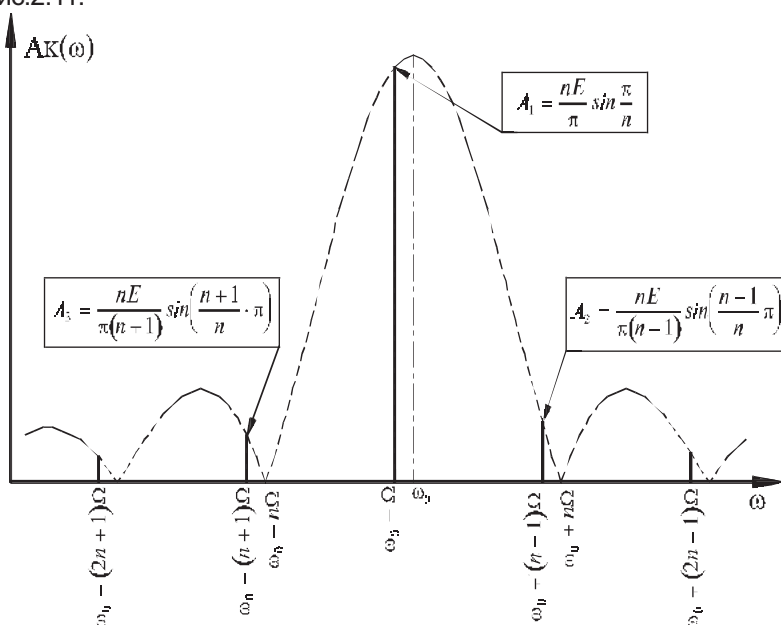


Рис. 2.11. Спектр сигналу на виході  $n$ -фазного перетворювача із низькочастотним керуванням при негативному прирості фази

Отже перетворювач (рис.2.7), реалізований за еквівалентною схемою (рис.2.9), здійснює зсув гармоніки  $\omega_0$  на величину, що дорівнює частоті повного циклу комутатора  $F = 1/T$ .

При цьому перетворювач реалізує наступні потенційні можливості:

- повне подавлення неробочої (дзеркальної) складової продукту перетворення;

- збереження фазових співвідношень в результаті перетворення;

- в спектрі сигналу на виході перетворювача існують гармонічні складові  $\omega_0 + (mn - 1)\Omega$  та  $\omega_0 - (mn + 1)\Omega$ , де  $m = 1, 2, 3, \dots$  які розташовані від основної гармоніки на відстані  $n\Omega$ , та слідуєть з інтервалом  $n\Omega$ , де  $n$  - число фазових станів перетворювача;

- подавлення максимальної паразитної складової спектра на величину:

$$D = 20 \lg \frac{(n-1) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\pi \frac{n-1}{n}\right)}, \quad [\text{дБ}] \quad (2.58)$$

Розглянемо тепер функціональну схему перетворювача з високочастотним управлінням (рис.2.8б).

В цьому випадку у перетворювачі (рис.2.7) відбувається періодична комутація  $n$  - фаз гармонічних сигналів на вихід з частотою, яка перевищує частоту цих гармонік, що можна розглядати як  $n$  балансних амплітудно-імпульсних модуляторів, у яких відбувається модуляція послідовності прямокутних імпульсів гармонічними сигналами з різним фазовим станом та суматора (рис.2.12).

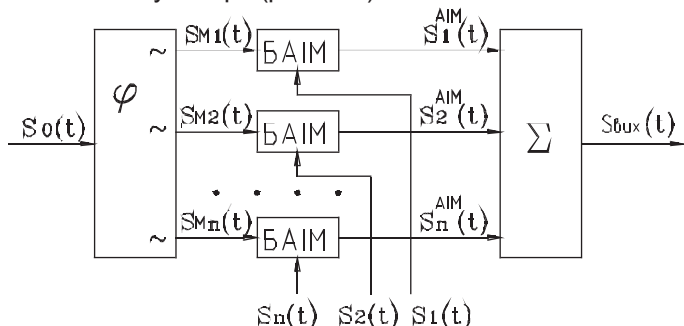


Рис.2.12. Еквівалентна схема перетворювача із високочастотним керуванням

Сигнал на вході фазорозщеплювача:  $S_0(t) = S \cos(\Omega t + \varphi_0)$ .

На виході фазорозщеплювача отримуємо функції модуляції:

$$\left. \begin{aligned} S_{M1}(t) &= S \cos(\Omega t + \varphi_{M1}) \\ S_{M2}(t) &= S \cos(\Omega t + \varphi_{M2}) \\ &\dots\dots\dots \\ S_{Mi}(t) &= S \cos(\Omega t + \varphi_{Mi}) \\ &\dots\dots\dots \\ S_{Mn}(t) &= S \cos(\Omega t + \varphi_{Mn}) \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Фаза  $i$ -ї модулюючої функції визначається:

$$\varphi_{Mi} = -(i - 1) \frac{2\pi}{n} + \varphi_0, \quad (2.60)$$

де  $n$  - кількість фазових станів перетворювача.

Модуляції піддаються послідовності прямокутних імпульсів (рис.2.10), які визначаються співвідношенням (2.38).

Функція, що являє собою тональну балансну амплітудно-імпульсну модуляцію, може бути представлена тригонометричним рядом Фур'є у вигляді [169, 170]:

$$\begin{aligned} S^{AIM}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} A_k M \cos[(k\omega_0 + \Omega)t + \varphi_M + \varphi_{Hk}] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} A_k M \cos[(k\omega_0 - \Omega)t - \varphi_M + \varphi_{Hk}] \right\} + \frac{S}{n} \cos(\Omega t + \varphi_M), \end{aligned} \quad (2.61)$$

де  $A_k$  - амплітуда спектральних складових спектра імпульсної послідовності, що піддається модуляції;

$M$  - коефіцієнт модуляції;

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  - частота повторення імпульсів;

$\Omega$  - частота модулюючої гармонічної функції;

$\varphi_M$  - початкова фаза модулюючої функції;

$\varphi_{Hk}$  - початкова фаза  $k$  гармоніки спектра імпульсної послідовності;

$S$  - амплітуда модулюючої гармоніки.

Для нашого випадку:

$$\left. \begin{aligned} M &= 1; \quad S = E; \\ A_k &= \frac{2E}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \varphi_M &= \varphi_{Mi} = -(i-1) \frac{2\pi}{n} + \varphi_0 \\ \varphi_{Hk} &= \varphi_{k,i} = -k(i-1) \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \right\}, \quad (2.62)$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots$  - номер гармонічної складової;

$i = 1, 2, \dots, n$  - номер функцій  $S_i(t)$  та  $S_{Mi}(t)$ .

Співвідношення (2.61) з урахуванням (2.62) буде:

$$\begin{aligned} S_i^{AIM}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{E}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{n} \cos \left[ (k\omega_0 + \Omega)t - (i-1) \frac{2\pi}{n} + \varphi_0 - k(i-1) \frac{2\pi}{n} \right] + \right. \\ &+ \frac{E}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{n} \cos \left[ (k\omega_0 - \Omega)t + (i-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi_0 - k(i-1) \frac{2\pi}{n} \right] \Big\} + \\ &+ \frac{E}{n} \cos \left[ \Omega t - (i-1) \frac{2\pi}{n} + \varphi_0 \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Враховуючи, що  $S_{BHX}(\omega) = \sum_{i=1}^n S_i^{AIM}(\omega)$  та зробивши аналіз

фазових співвідношень окремих складових спектра, отримаємо вираз для сигналу на виході перетворювача, який працює з негативним приростом фази [169-170]:

$$\begin{aligned} S_{BHX}^{n-}(t) &= \frac{nE}{\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mn+1} \sin \left( \pi \frac{mn+1}{n} \right) \cos [((mn+1)\omega_0 - \Omega)t - \varphi_0] + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn-1} \sin \left( \pi \frac{mn-1}{n} \right) \cos [((mn-1)\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0] \Big\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Амплітудно-частотний спектр такого сигналу зображено на рис. 2.13.

Для перетворювача з високочастотним управлінням, який працює з позитивним приростом фази, отримаємо:

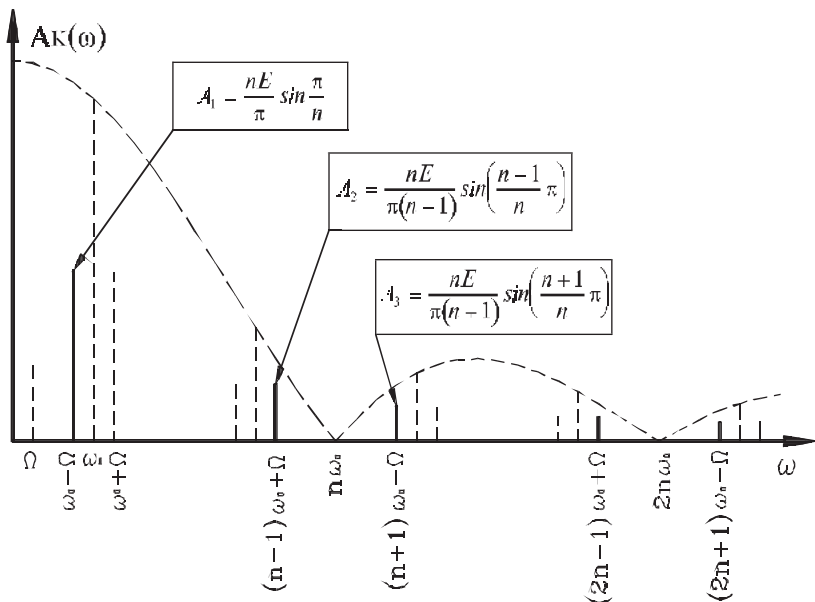


Рис.2.13. Спектр сигналу на виході n-фазного перетворювача із негативним приростом фази

$$S_{BHX}^{n''}(t) = \frac{nE}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn-1} \sin\left(\pi \frac{mn-1}{n}\right) \cos[(mn-1)\omega_0 - \Omega)t - \varphi_0 + \varphi'_n] + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mn+1} \sin\left(\pi \frac{mn+1}{n}\right) \cos[(mn+1)\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \varphi''_n] \right\} \quad (2.65)$$

Амплітудно-частотний спектр такого сигналу зображено на (рис.2.14).

Спектральні складові отримують додаткову прибавку до початкових фаз  $\varphi'_n$  або  $\varphi''_n$ , яка визначається фазовим станом гармоніки, що подається комутатором на вихід в момент часу  $t = 0$ . Так, якщо в момент часу  $t = 0$  на вихід комутатором подається гармоніка з фазовим станом рівним  $-(n-1) \frac{2\pi}{n}$ , то прибавки до початкових фаз спектральних складових у виразі (2.65) будуть мати значення:

$$\varphi'_n = \frac{2\pi}{n} (mn-1), \quad \text{та} \quad \varphi''_n = \frac{2\pi}{n} (mn+1).$$

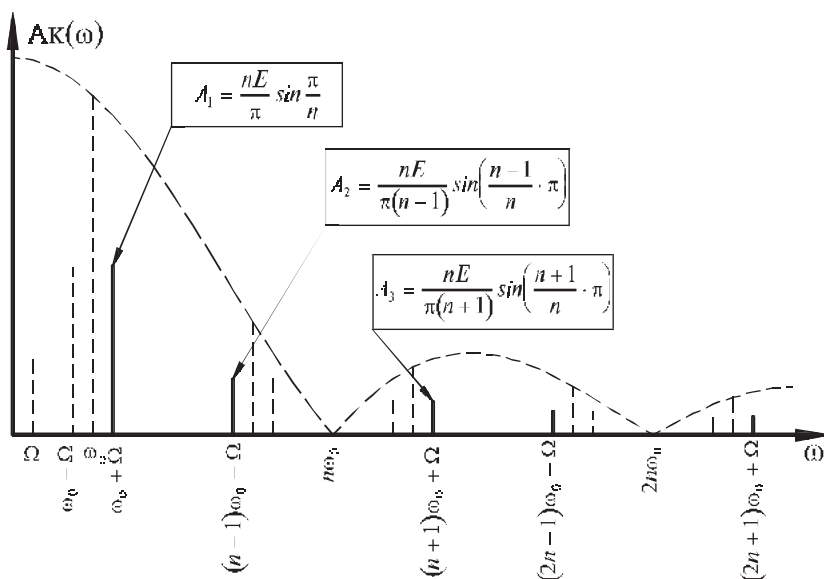


Рис.2.14. Спектр сигналу на виході  $n$ -фазного перетворювача із позитивним приростом фази

Аналізуючи вирази (2.64) та (2.65) можна зробити наступні висновки щодо перетворювача з високочастотним управлінням:

- повне подавлення неробочої (дзеркальної) складової продукту перетворення;
- при перетворенні частоти вниз початкова фаза зберігає своє абсолютне значення, але змінює знак;
- при перетворенні частоти вверх початкова фаза зберігає своє значення;
- перетворювач дає змогу задавати наступні значення приросту фази на виході:

$$\frac{2\pi i}{n}, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n$$

де  $n$  - число фазових станів перетворювача;

- найближча паразитна складова спектра розташована від основної гармоніки на відстані:

$$(n-2)\omega_0 + 2\omega - \text{при перетворенні вниз,}$$

$$(n-2)\omega_0 - 2\omega - \text{при перетворенні вверх;}$$

- паразитні складові спектра розташовані одна від одної на неоднакових інтервалах, які чергуються і рівні:

$2(\omega_0 + \Omega)$  та  $(n - 2)\omega_0 - 2\Omega$  - для перетворення вверх,

$2(\omega_0 - \Omega)$  та  $(n - 2)\omega_0 - 2\Omega$  - для перетворення вниз;

- реалізується подавлення максимальної паразитної складової спектра на величину:

$$D = 20 \lg \frac{(n-1) \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \left( \pi \frac{n-1}{n} \right)}, \quad [\text{дБ}] \quad (2.66)$$

В результаті проведеного аналізу, а також експериментальних досліджень з використанням комутаторів ІМС 564КП1, КП2, 590КН4 були отримані важливі для практичних задач висновки [187, 188]:

- при використанні першої гармоніки вихідного сигналу, він повністю відповідає фазовому квадратурному методу формування сигналу з однією боковою смугою і зберігає всі його властивості;

- оскільки один канал фазочастотного перетворювача на основі комутаторів є цифровим (дискретним і квантованим), то ступінь подавлення і стабільність підтримання параметрів односмугового перетворення значно вищі, ніж в класичних схемах;

- збагачення вихідного сигналу гармоніками за рахунок складного спектра сигналу комутації (в залежності від потреби можуть бути відфільтровані) є платою за значне спрощення і підвищення стабільності характеристик реальних пристроїв, і прийнятливим для багатьох задач фазочастотної вимірювальної техніки.

Оскільки проведений аналіз дозволив лише знайти спектральні характеристики сигналів отриманих шляхом динамічного зсуву приросту фаз, а для вимірювання потрібно знати тонку структуру сигналу, тому подальші дослідження будуть стосуватися дослідження та розробці нових методів фазочастотних методів формування радіосигналів.



## ВИСНОВКИ ДО ДРУГОЇ ГЛАВИ

1. Аналізуючи стан проблеми було встановлено, що в класичній вимірювальній техніці склалися два напрямки: вимірювання частоти (група Ч) та вимірювання фазового зсуву (група Ф). Такий факт є результатом використання квазігармонічних моделей радіосигналів та штучного обмеження поняття кут фазового зсуву. Вказаний розподіл призводить до ряду парадоксів та непорозумінь і не дозволяє одночасно підвищувати точність і швидкодію під час вимірювання та перетворення фазочастотних параметрів радіосигналів внаслідок неадекватності існуючих класичних моделей та визначень реально існуючим фазочастотним параметрам саме радіосигналів.

2. Розроблені та досліджені математичні моделі вимірювання та перетворення фазочастотних параметрів радіосигналів і доведено, що єдиною адекватною моделлю, яка відповідає реальним процесам, є модель, що ґрунтується на понятті повного фазового зсуву та його похідних, як головного інформаційного параметра в теорії ФЧВ та ПР, що дозволило розробити нові методи та прилади для фазочастотних вимірювань.

3. Розроблено моделі аналітичного визначення та представлення результатів вимірювання ПФЗ у різних системах числення (двійковій, десятковій та інші). Це дозволило узгодити представлення результатів вимірювання даними системами та вказати на переваги фазочастотного підходу до вимірювання та збільшення динамічного діапазону. Останній проявляється у доповненні шкали цілих дробовими значеннями (ноніус) або доповнення дробової частини ПФЗ значенням цілих ФЦ.

4. Встановлено та досліджено два основних напрямки теорії ПФЗ і ПР які визначені як аналіз (вимірювання фазочастотних параметрів радіосигналів), та синтез (перетворення та формування фазочастотних параметрів радіосигналів), що дозволило розв'язати задачі вимірювання та формування радіосигналів із одночасним підвищенням точності та швидкодії, відносно існуючих.

5. Дослідження розроблених моделей розв'язування завдань аналізу і синтезу фазочастотних параметрів радіосигналів та їх перетворень дозволило запропонувати узагальнену кваліфікаційну таблицю, в якій визначені основні напрямки застосування методів ФЧВ і ПР.

6. Використання фазочастотного підходу для вирішення завдань аналізу та синтезу радіосигналів дозволило вказати на нові можливості, які відсутні в рамках класичних уявлень частотного або

фазового підходів. Нових можливостей потребують такі галузі як: інтерферометрія; динамічна торсіометрія; вимірювання девіації та індексу модуляції; вимірювання характеристик нестабільності опорних генераторів; вимірювання частоти сигналів із тонкою структурою, а також такі важливі види реалізації закону зміни  $Y(t)$ , як: синтез сітки когерентно-фазових частот; здійснення зовнішньої ЧМ; формування ортогональних дискретних функцій; керування параметрами девіації та індексу модуляції, до повного зняття модуляції; трансверсія фазових співвідношень сигналів; формування квадратурних сигналів; імітація часу затримки " $t$ "; компенсація частоти Доплера; формування "згорнутих" ЧМС.

7. На прикладі застосованого класичного аналізу спектральних характеристик радіоімпульсної послідовності показано умовність використання поняття спектру. Вказано на значну складність процедури аналізу із застосуванням апарату майже періодичних функцій, що підтверджує прояви неадекватності таких моделей та визначення параметру частота - для радіосигналів.

8. Приведено аналіз моделей динамічного режиму дискретно-аналогового комутатора як фазообертача підтвердив адекватність аналогової та дискретно-аналогової моделей зсуву частоти, та можливість їх використання для імпульсних перетворень та формування радіосигналів.

9. Детальний аналіз динамічного режиму дискретно-аналогового комутатора як фазообертача, дозволив підтвердити адекватність аналогової та дискретно-аналогової моделей зсуву частоти, та можливість їх використання для імпульсних перетворень та формування радіосигналів.